DS n°6 : Structures algébriques, matrices, arithmétique

Durée : 3 heures. Calculatrices non autorisées.
Toute affirmation non triviale doit être justifiée.

Exercice 1 : la confiture à la Chandeleur

Un groupe d'élèves décide d'organiser une soirée Crêpes / Gaufres à l'occasion de la Chandeleur. Ils disposent d'un stock de 200 g de confiture.

- *Pour garnir une gaufre, il faut exactement 18 g de confiture.*
- *Pour garnir une crêpe, il faut exactement 13 g de confiture.*
- *Les élèves veulent utiliser la totalité des 200 g de confiture.*

Le but du problème est de trouver toutes les quantités possibles de crêpes et de gaufres qu'on peut réaliser avec ces contraintes.

1) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $13x + 18y = 1$.

2) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $13x + 18y = 200$.

3) Parmi les solutions trouvées à la question précédente, déterminer celles qui sont dans $\mathbb{N}^2$. On pourra utiliser les divisions euclidiennes suivantes :

$$1000 = 76 \times 13 + 12 \qquad 1400 = 77 \times 18 + 14$$

4) Répondre au problème posé.

Problème 1 : Anneau $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$

On considère l'ensemble $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \left\{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Z}\right\}$.

1) Montrer que $(\mathbb{Z}[\sqrt{2}], +, \times)$ est un anneau.

2) Montrer que l'anneau $(\mathbb{Z}[\sqrt{2}], +, \times)$ est commutatif et intègre.

3) Pour tout $x = a + b\sqrt{2}$ dans $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$, on pose $N(x) = a^2 - 2b^2$.

a) Montrer que l'application

$$\begin{aligned} N : \mathbb{Z}[\sqrt{2}] &\to \mathbb{Z} \\ x &\mapsto N(x) \end{aligned}$$

vérifie la propriété suivante : $\forall x, y \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}] \qquad N(xy) = N(x)N(y)$.

b) Rappeler (sans justification) quels éléments de $\mathbb{Z}$ sont inversibles (pour la multiplication).

c) Déduire des questions précédentes que si x est inversible dans $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ (pour la multiplication), alors $N(x) \in \{-1, 1\}$.

4) En déduire que $x \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ est inversible si et seulement si $x = a + b\sqrt{2}$, avec $a^2 - 2b^2 \in \{-1, 1\}$.

Exercice 2 : Groupe avec deux lois

Soit $(G, \cdot)$ un groupe et $a \in G$. On définit une loi de composition interne $\top$ sur G par

$$x \top y = xay$$

Pour tout $x \in G$, on notera x^{-1} son symétrique pour $\cdot$, et (lorsqu'il existe) x' son symétrique pour $\top$.

1) Montrer que $(G, \top)$ est un groupe. *Attention, la deuxième "moitié" de la réponse est plus délicate que la première. Il faut bien poser le calcul au brouillon.*

2) Soit $\varphi : G \to G$ définie par $\varphi(x) = xa^{-1}$. Montrer que φ est un morphisme de $(G, *)$ dans $(G, \top)$.

3) Est-ce que φ est un endomorphisme ? Un isomorphisme ? Un automorphisme ?

Problème 2 : suite récurrente linéaire d'ordre 3

Soit (u_n) la suite récurrente définie par

$$\begin{cases} u_{n+3} = u_{n+2} + u_{n+1} - u_n & \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \\ u_2 = -1 \\ u_1 = 1 \\ u_0 = 0 \end{cases}$$

Le but de cet exercice est de déterminer le terme général de la suite (u_n). On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$U_n = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = AU_n$. En déduire une expression de U_n en fonction de A, n et U_0.

2) Déterminer les valeurs des réels x, y, z, t, u, v tels que la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ t & u & v \end{pmatrix}$ vérifie $AP = PB$.

3) On admet que $P^{-1} = \dfrac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que $A = PBP^{-1}$.

4) En déduire A^n en fonction de P, B et n.

5) On introduit les matrices suivantes :

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Déterminer N^n et D^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

6) En déduire B^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

7) Déterminer u_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.